Verallgemeinerung des Pythagoras

von Manfred Hörz

Den Satz des Pythagoras

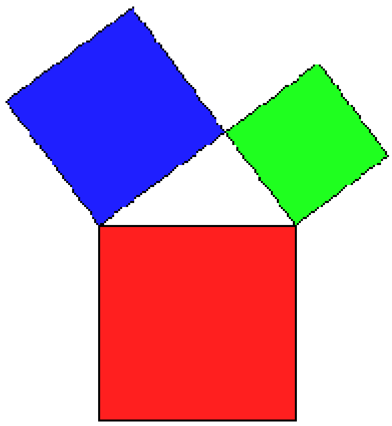
$$a^2+b^2=c^2$$

könnte man in Richtung des Fermatschen Satzes

$$a^3+b^3=c^3 \text{ oder } a^n+b^n=c^n \quad n\geq 3$$

verallgemeinern. Nur dürfte das nicht besonders überzeugen, da dieser ja in keine Lösungen hat.

Logischer wäre es da schon, wenn man den geometrischen Hintergrund mit berücksichtigt, aus dem heraus er ja auch entdeckt wurde und in dem er auch seine Anwendungen hat:



Die adäquate Verallgemeinerung wäre dann von $a^2+b^2=c^2$ nicht $a^3+b^3=c^3$, sondern die höhere Dimension müsste sich dann auch geometrisch widerspiegeln.

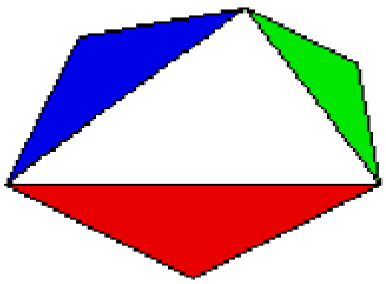
In der Geometrie nennt man die einfachsten Figuren **Simplizes**. Der nulldimensionale Simplex ist der Punkt, der eindimensionale die Strecke, das Dreieck der zweidimensionale Simplex und schließlich das Tetraeder der dreidimensionale. So könnte es beliebig weiter gehen. Sie sind nämlich rekursiv aufgebaut. Die Strecke ist durch zwei nulldimensionale begrenzt, das Dreieck durch drei nulldimensionale und drei eindimensionale, das Tetraeder

durch nulldimensionale, sechs eindimensionale und vier zweidimensionale. Entsprechend wäre das Hypertetraeder, der vierdimensionale Simplex, durch fünf Tetraeder begrenzt.
Diese Simplizes sind selbstähnlich rekursiv aufgebaut. Halbiere ich eine Strecke, so habe ich zwei gleiche (Teil-)Strecken und das Ganze ist wie seine Teile, eine Strecke. Stelle ich dieses Ganze nun anders dar, indem ich das Innere nach außen kehre, d.h. den inneren Teilpunkt in die zweite Dimension, entsteht das Dreieck. Also Verdoppelung und Repulsion. Beim Punkt gibt es nur die Repulsion. Teilt sich das Dreieck in drei gleiche (innere) Dreiecke und kehrt sich das Innere (der Mittelpunkt) nach außen, so erhält man in der nächsten Dimension das Tetraeder ohne realen inneren Punkt. So geht es weiter: Teilt sich das Tetraeder in vier gleiche Teiltetraeder und hat demnach fünf, vier Teile und ein ganzes, und kehrt sich der reale Mittelpunkt nach außen in die vierte Dimension, so erhält man das Hypertetraeder.
Man hat hier das **Prinzip des selbstähnlichen Wachstums**, allerdings mit Dimensionsschöpfung.

Dimension d das Ganze ∨ die Teile >	**d = 0** **Punkte**	**d = 1** **Strecken**	**d = 2** **Dreiecke**	**d = 3** **Tetraeder**	**d = 4** **Hypertetraeder**
Punkt d = 0	$1 = \binom{1}{1}$				
Strecke d = 1	$2 = \binom{2}{1}$	$1 = \binom{2}{2}$			
Dreieck d = 2	$3 = \binom{3}{1}$	$3 = \binom{3}{2}$	$1 = \binom{3}{3}$		
Tetraeder d = 3	$4 = \binom{4}{1}$	$6 = \binom{4}{2}$	$4 = \binom{4}{3}$	$1 = \binom{4}{4}$	
Hypertetraeder d = 4	$5 = \binom{5}{1}$	$10 = \binom{5}{2}$	$10 = \binom{5}{3}$	$5 = \binom{5}{4}$	$1 = \binom{5}{5}$

Man erkennt hier die Binomialkoeffizienten wieder. Ein n-Simplex (der n-ten Dimension) hat genau $\binom{n+1}{k+1}$ k-Simplizes als Rand- oder Untersimplizes. Also lassen sich die Anzahlen über das Pascalsche Dreieck erzeugen.

Zurück nun zur geometrischen Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras.
Das Dreieck als zweidimensionales Simplex würde zum dreidimensionalen Simplex, einem Tetraeder.
Um hier noch mehr verallgemeinerungsfähige Symmetrie zu erzeugen, sollte der Pythagoras geometrisch umformuliert werden. Auf den eindimensionalen Simplizes, den Strecken (Seiten), sollten zweidimensionale errichtet werden, also keine Quadrate, sondern wiederum Dreiecke, etwa gleichschenklige, deren Höhe jeweils in gleicher Proportionalität zu den Grundseiten steht.



Das einfachste wären also Höhen, die genau die Grundseiten wären. Deren Flächeninhalt ist dann

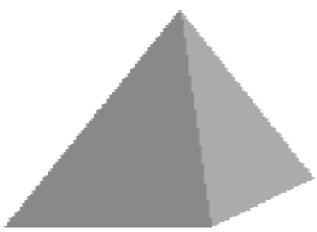
$$\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}a\cdot a \text{ bzw. } \frac{1}{2}b\cdot b \text{ bzw. } \frac{1}{2}c\cdot c \qquad .$$

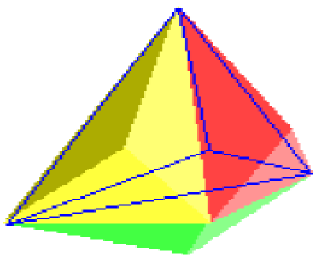
Somit hätte der Pythagoras wieder seine ursprüngliche arithmetische Form:

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2 \quad \text{oder eben} \quad a^2+b^2=c^2$$

In diesem Sinne stünden dann auf den vier Dreiecken des Tetraeders wieder Tetraeder, deren Inhalte zu $\frac{1}{3}G\cdot h$ und bei geeigneter Wahl der Tetraedergrunddreiecke und proportionaler Höhen der aufgesetzten Tetraeder wieder herauskäme.

$$\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}b^3+\frac{1}{3}c^3=\frac{1}{3}d^3 \quad \text{oder} \quad a^3+b^3+c^3=d^3$$





(Im rechten Bild sind sind die drei Seitentetraeder gelb, rot und grün sichtbar. Das hintere verdeckte ist mit blauen Linien eingezeichnet.)

Nun gibt es hierfür tatsächlich jede Menge von ganzzahligen Lösungsquadrupeln. Selbst das schöne pythagoräische Tripel

$$3^2+4^2=5^2$$

besitzt hier sein dreidimensionales Analogon, nämlich

$$3^3+4^3+5^3=6^3$$

Eine kleine Liste vergleicht die Pythagoräischen Tripel mit den neuen Quadrupeln:

a	b	c
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	12	15
9	40	41
10	24	26
12	16	20
12	35	37
14	48	50
15	20	25
15	36	39

a	b	c	d
1	6	8	9
2	12	16	18
2	17	40	41
3	4	5	6
3	10	18	19
3	18	24	27
3	36	37	46
4	17	22	25
4	24	32	36
5	30	40	45
6	8	10	12
6	20	36	38
6	32	33	41

Bleibt noch die Frage zu klären, welchen Raumwinkel die Spitze des Tetraeders besitzen muss, damit diese Quadrupel erzeugt werden. Die Frage ist genauer, welche der möglichen Verallgemeinerungen des zweidimensionalen Falls sich als fruchtbar erweist.

Man könnte da etwa an ein kartesisches Dreibein denken, dessen Kanten paarweise orthogonal sind oder an eine Festlegung der Orthogonalität über die Verallgemeinerung des Thaleskreises: Auf einem Großkreis einer Halbkugel sitzt ein Dreieck (dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkt zusammen fällt), das mit einem Punkt auf der Halbkugelschale einen Tetraeder bildet. Zu vermuten ist, dass die räumlichen Spitzenwinkel für alle Spitzen der Halbkugel konstant sind und als Grundwinkel gewählt werden könnten. Auf die Winkelproblematik möchte ich weiter unten eingehen.

Blicken wir zurück zu der geometrisch-analytischen Verallgemeinerung, so sollte man annehmen, das das für höhere Dimensionen auch klappt. Man würde also bei einen Hypertetraeder , einem vierdimensionalen "Fünfräumler", einem 5-Simplex, auf seinen Grenzflächen, den fünf Tetraedern solche Fünfräumler errichten und erwarten, dass für gewisse Verhältnisse die diophantische Gleichung

$$a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$$

für ihre Hypervolumina gelte.
Doch wie es aussieht haben diese und weitere höherdimensionale Gleichungen, wie etwa

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=f^5$$

oder allgemein

$$a_1^n+a_2^n+...+a_n^n=a_{n+1}^n \quad \text{oder} \quad \sum_i^n a_i^n=a_{n+1}^n$$

keine ganzzahligen positiven Lösungen. So lautet zumindest meine Vermutung. Ich habe bisher mit Hilfe des Computers keine finden können.

Wenn diese Vermutung stimmt, so liegt hier eine geometrische Korrektur des fermatschen Satzes vor, der geometrische Bedeutung haben könnte.

Ich meine, dies könnte ein Beleg dafür sein, **dass unser physikalischer Raum in der Tat nur dreidimensional ist.**
Eine der vier konkurrierenden fundamentalen Theorien, die sich anschicken, unsere Welt in einem Superreduktionismus erklären zu wollen (woran ich nicht glauben kann), die so genannte Triangulationstheorie, geht von den dreidimensionalen Atomen, den Tetraedern aus und klebt diese auf eine gewisse Art zusammen und will so in einer Quantentheorie den Raum erzeugen, mit nicht geringem Erfolg. Denn das dreidimensionale Analogon des Pythagoras für ganze Zahlen könnte diese Theorie weiter stützen. Damit gäbe es nur dreidimensionale Raumquanten, die ganzzahligen pythagoräischen Tetraeder, die auch nur einen dreidimensionalen Raum erzeugen könnten.